Primitives

I- Définition et théorèmes

Définition :

Soit f et F deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.
F est dite une primitive de f sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et pour tout x de I , F '(x) = f(x) .

Remarque:

Pour vérifier que F est une primitive de f sur I, il suffit de dériver F ; on doit trouver que F'= f.

Théorème 1:

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème 2:

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.
Alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par : pour tout x de I, G(x) = F(x) + c , avec c un nombre réel .

Théorème 3:

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I, x_0 un point de I et y_0 un réel quelconque fixé.
Il existe alors une **unique**primitive de f , F , telle que $F(x_0) = y_0$.
F est appelée la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Théorème 4:

Si f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels , F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I , alors aF + bG e st une primitive de af + bg sur I .

Retenons:

Si f et g sont deux dérivables sur un intervalle I telles que, pour tout x de I , f '(x) = g'(x) alors il existe un nombre réel c tel que , pour tout x de I , g(x) = f(x) + c

II- Calcul de primitives de fonctions usuelles.

Donnons donc le tableau des primitives qui doit être parfaitement connu (c est un réel):

Si f est définie par	sur l'intervalle	alors ses primitives s'écrivent
a , a réel fixé	$\mathbb{R}$	ax + c
x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^n , $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
x^n , $n < -1$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$-\frac{1}{x} + c$
cos x	$\mathbb{R}$	$\sin x + c$
sin x	$\mathbb{R}$	-cos x + c

Primitives

$\cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$	$2\sqrt{x}+c$
$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$

III- Savoir reconnaître une formule composée

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

f	F	Conditions
$k.u'$, k réel	$k.u$	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'.v + u.v'$	$u.v$	
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	v ne s'annule pas sur I
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n \geq 1$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n \leq -2$ et u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ $u'\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$ $\frac{2}{3}u\sqrt{u}$	u est positive et ne s'annule pas sur I u est positive sur I .

IV- Calcul de primitives de fonctions trigonométriques

Exemple 1 :

Soit $f(x) = \cos^2 x.\sin^3 x$

a) Montrer que $f(x) = \sin x\left(\cos^2 x - \cos^4 x\right)$.

b) Calculer alors toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Solution:

a) Pour tout x réel,

$$f(x) = \cos^2 x.\sin^3 x = \sin x\left(\cos^2 x.\sin^2 x\right)$$

$$= \sin x\left[\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)\right] = \sin x\left(\cos^2 x - \cos^4 x\right)$$

b) Pour tout x réel, $f(x) = \sin x\left(\cos^2 x - \cos^4 x\right) = \sin x.\cos^2 x - \sin x.\cos^4 x$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Primitives

Remarque :ici il s'agit de calculer les primitives des fonctions du type $\cos^n x.\sin^m x$ avec **n ou m impair** . La méthode de calcul est toujours la même et est basée sur la formule $\cos^2 + \sin^2 x = 1$.

Exemple 2 :

Soit $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$.

a) Montrer que, pour tout x réel , $f(x) = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$

b) Calculer alors toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Solution:

Pour tout x réel,

$$f(x) = \cos^2 x.\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{1}{64}\left[\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 = \frac{1}{64}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{6ix}-2e^{4ix}+e^{2ix}-2e^{2ix}+4-2e^{-2ix}+e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left[\left(e^{6ix}+e^{-6ix}\right)-2\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)-\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+4\right]$$

$$= \frac{1}{64}(2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4)$$

$$= \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$$

c) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right) + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$

Remarque: ici il s'agit de calculer les primitives des fonctions du type $\cos^n x.\sin^m x$ avec **n et m pairs**
La méthode de calcul est toujours la même et est basée sur la linéarisation.

V- Calcul de primitives de fonctions rationnelles

Exemple1:

Soit $f(x) = \frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^2}$.

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.

b) Calculer toutes les primitives de sur $]-\infty,1[$.

Solution:

a) On remarque que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

Primitives

$$f(x)=\frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^2}=\frac{2(x^2-2x+1)+1}{(x-1)^2}=2+\frac{1}{(x-1)^2}$$ ainsi a = 2 et b = 1.

b) Les primitives de f sur $]-\infty,1[$ sont $x\mapsto 2x-\frac{1}{x-1}+c$, $c\in\mathbb{R}$

Exemple 2:

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^5-2x^3+5x}{(x^2-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,
$$f(x)=ax+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x+1)^2}.$$
2. Déterminer la primitive F de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0.

Solution:

1. Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,
$$f(x)=ax+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{ax(x^2-1)^2+b(x+1)^2+c(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{ax(x^2-1)^2+b(x+1)^2+c(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{ax(x^4-2x^2+1)+b(x^2+2x+1)+c(x^2-2x+1)}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{ax^5-2ax^3+ax+bx^2+2bx+b+cx^2-2cx+c}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{ax^5-2ax^3+(b+c)x^2+(a+2b-2c)x+b+c}{(x^2-1)^2}$$

D'où $\begin{cases}a=1\\-2a=-2\\b+c=0\\a+2b-2c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b+c=0\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-1\end{cases}$.

2. Comme pour tout x de $]-1,1[$, $f(x)=x+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$ alors toute primitive F de f sur $]-1,1[$ s'écrit $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+c$, où $c\in\mathbb{R}$.

   Pour que F soit la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0, il faut que F(0) = 0 d'où c = -2.

   Ainsi, pour tout x de $]-1,1[$, $F(x)=\frac{1}{2}x^2-2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.